06/01/2019

ΚΕΦ. 4. Αναλυτικές Συναρτήσεις

(+ΚΕΦ.5 ⇒ αναλ. = ολόμορφε

{Θεώρηση

συναρτήσεις που προκύπτουν από δυναμοσειρές

§ 4.1. Σειρές (στο $\mathbb{C}$)

{ Δομή ή ιδιότητες όπως στο
{ Προσαρμοσμένες στις δύο διαστάσ

Ορισμός: Έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων

$$S_n := \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

ονομάζεται σειρά και συμβολίζεται με:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

, και αν η (S_n) συγκλίνει, τότε το όριο της, συμβολίζεται (και αυτό!):

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n := \lim_n S_n \in \mathbb{C}$$

Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει απόλυτα αν η $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ συγκλίνει δηλ. αν $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$.

Παρατήρηση: Οι έννοιες της σειράς, σύγκλισης σειράς, απόλυτη σύγκλιση σειράς, είναι, επεκτάσεις των αντίστοιχων εννοιών στο $\mathbb{R}$.

[δηλ., αν $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, τότε οι παραπάνω έννοιες είναι οι ίδιες τ___ αν κοιτάζω στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$].

Πρόταση:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει $\Rightarrow z_n \to 0$

(β) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ συγκλίνουν $\Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n + \mu w_n)$ συγκλίνει και για τα αντίστοιχα όρια

ισχύει:

$$\sum (\lambda z_n + \mu w_n) = \lambda \sum z_n + \mu \sum w_n$$

(γ) Αν $z_n = x_n + i y_n$ με $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$, τότε:

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, και η σειρά στα αριστερά

συγκλίνει $\Leftrightarrow$ και οι δύο σειρές στα δεξιά συγκλίνουν

(δ) Αν: $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n < \infty$

Απόδειξη:

(α) Εάν θεωρήσουμε ως $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = (S_n)$, με $S_n \to s$

Άρα $\sum_{n=1}^{n} z_k \Rightarrow S_{n-1} \to s$, $n \geq 2$

↳ n-1;

(δ) Αν η $a_n = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει $\xRightarrow{\mathbb{R}\text{-πλήρης}}$

$\Rightarrow$ η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ είναι ακολ. Cauchy και αφού

$|S_{n+l} - S_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} |z_k| = a_{n+l} - a_n$, $\forall n, l \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (S_n)$ είναι ακολ. Cauchy στο $\mathbb{C}$ $\xRightarrow{\mathbb{C}\text{-πλήρης}}$ η $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

συγκλίνει. ■

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, l \geq n_0): |a_{n+l} - a_n| < \varepsilon$

SUPER - SOS:

Η γεωμετρική σειρά : $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{z^n}_{z_n}$ συγκλίνει για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

με όριο :

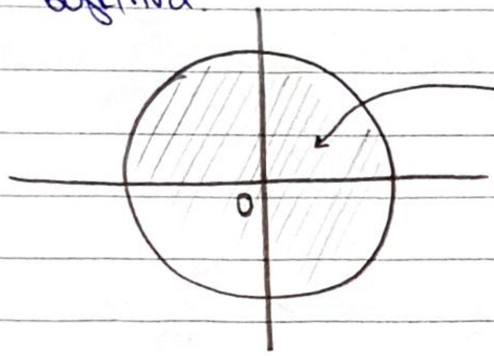
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad , \; z \in D(0,1).$$

και μάλιστα απόλυτα : $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$, $z \in D(0,1)$

[αφού : $|z|^n \to 0$ για $|z| < 1$, και $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$, $z \neq 1$]

- υπόδειξη ως άσκηση -

ενώ αποκλίνει για $|z| > 1$, αφού τότε $|z|^n \geq 1$ και άρα $z^n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ δεν συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ δεν συγκλίνει.



: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n < +\infty$ στο : $\mathring{D}(0,1) \subset \mathbb{C}$

Πρόταση: (Κριτήρια σύγκλισης σειρών)

① Κριτήριο σύγκρισης : αν $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < \infty$ και $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n \geq n_0 : |z_n| \leq |w_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$

και αν:

$\lim_n \frac{|z_n|}{|w_n|} \in (0, +\infty)$ τότε : $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ σε σύγκλιση.

Απόδειξη:

Το πρώτο: πληρότητα του $\mathbb{R}$.
το δεύτερο: $\lim_n \frac{|z_n|}{|w_n|} = a \in (0, +\infty) \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0$:

$$|z_n| < (a+1)|w_n| \xRightarrow[\text{κριτήριο}]{\text{σύγκρισης}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty \Rightarrow (a+1)\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a+1)|w_n| < +\infty \right\}$$

άρα: $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$, και το αντίστροφο προκύπτει από το ότι:

$$\lim_n \frac{|w_n|}{|z_n|} = \frac{1}{a} \in (0, +\infty)$$

② Κριτήριο λόγου: αν $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με: $z_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$, τότε ισχύει:

$$\limsup_n \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

και,

$$\liminf_n \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ αποκλίνει}$$

③ Κριτήριο ρίζας:

$$\limsup_n \sqrt[n]{|z_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

και: $\limsup_n \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει

* **Σχόλιο:** Εάν $\exists \lim_n |z_n| \in [0,\infty)$

Τότε: $\lim |z_n| = \limsup |z_n| = \liminf |z_n|$ και αντίστροφ

Απόδειξη του ②:

- Έστω $\limsup_n \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1. \Rightarrow \exists\, a \in (0,1):$

$\limsup_n \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < a. \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0:$

$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < a.$

Τώρα, $\forall n \geq n_0: \quad \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \prod_{k=n_0}^{n} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} < \frac{a^{n+1}}{a^{n_0}}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, από το κριτήριο σύγκρισης και τη σύγκλιση της γεωμ. σειράς.

(άσκηση)

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \quad \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \prod_{k=n_0}^{n} \dfrac{|z_{k+1}|}{|z_k|} < \dfrac{a^{n+1}}{a^n}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, από το κριτήριο σύγκρισης και την σύγκλιση της γεωμετρικής σειράς

§1.2. Δυναμοσειρές

Ορισμός: Μια σειρά (άρα, καταρχήν, καμία πληροφορία περί σύγκλισης ή όχι) της μορφής:

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

, ονομάζεται δυναμοσειρά με κέντρο $a \in \mathbb{C}$ και συντελεστές $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Η $(*)$ είναι μια σειρά συναρτήσεων $f_n(z) = c_n (z-a)^n$

[Παρένθεση: Έστω $\emptyset \neq D \subset \mathbb{C}$. Έστω $f_n : D \to \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται ακολουθία συναρτήσεων και η ακολουθία συναρτήσεων $g_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ ονομάζεται σειρά συναρτήσεων και συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Λέμε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην $f: D \to \mathbb{C}$, αν $f_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(z)$ $\forall z \in D$.

[Αντίστοιχα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει κατά σημείο, αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει $\forall z \in D$]

Επίσης, λέμε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f : D \to \mathbb{C}$, αν:

$$\underbrace{\boxed{\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|}}_{=: \|f_n - f\|_\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

[αν $f_n, f \in C(D) = \{$συνεχείς συναρτήσεις από το D στο $\mathbb{C}\}$ και $D \subset \mathbb{C}$ συμπαγές, τότε:

$f_n - f \in C(D) \Rightarrow |f_n - f| \in C(D) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \|f_n - f\|_\infty \in [0,\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$]

Πρόταση: $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f_n \to f$ κατά σημείο.

Απόδειξη:

$f_n \to f$ ομοιομ. $\iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff$

$$\iff \forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{=\sup_{z\in D}|f_n(z)-f(z)|} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall z \in D : 0 \le |f_n(z) - f(z)| \le \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \square$$

Παρατήρηση: Προφανώς (αν ίσχυε γιατί να εισάγαμε νέα έννοια ~~...~~ σύγκλισης;) δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλ. γενικά:

$f_n \to f$ κατά σημείο $\not\Rightarrow$ $f_n \to f$ ομοιομ.

Από τα πιο απλά (αντι-)παραδείγματα:

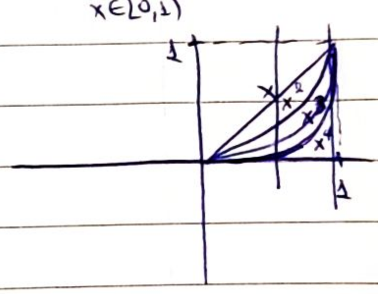
Έστω $D = [0,1) \subset \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, με $x \in D$. Τότε

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία συναρτ. $f_n : D \to \mathbb{R}$ συγκλίνει κατά σημείο στην $f(x) = 0 \ \forall x \in D = [0,1)$

[$\forall x \in [0,1)$ έχουμε: $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = f(x)$]

Όμως δεν συγκλίνει ομοιόμορφα (στο πεδίο ορισμού της) ~~αφού~~ σε κάποια $g : D \to \mathbb{R}$, αφού αν αυτό ίσχυε, τότε θα ίσχυε $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \ \forall x \in D$, και άρα (μοναδικότητα ορίου ακολουθίας πραγματικών αριθμών) $g(x) = 0 \ \forall x \in D$, αλλά

$$\|f_n - g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - \underbrace{g(x)}_{=0}| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$$



$$\Rightarrow \|f_n - g\|_\infty \not\to 0$$